

## ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА «Случайные процессы»

Определение понятия «случайный процесс». Система конечномерных распределений случайного процесса, ее свойства. Моментные функции случайного процесса. Корреляционная и взаимная корреляционная функции случайных процессов, их свойства. Преобразования случайных процессов.

Непрерывность случайного процесса в среднем квадратическом, ее необходимое и достаточное условие. Непрерывность случайного процесса по вероятности и с вероятностью единица. Производная случайного процесса в среднем квадратическом, необходимое и достаточное условие ее существования. Интеграл от случайного процесса в среднем квадратическом, необходимое и достаточное условие его существования.

Стационарный случайный процесс. Строгая и слабая стационарность случайного процесса. Взаимная стационарность случайных процессов. Эргодичность случайного процесса по математическому ожиданию в среднем квадратическом. Условия эргодичности по математическому ожиданию.

Спектральное представление стационарного случайного процесса. Теорема Хинчина о спектральном представлении корреляционной функции случайного процесса. Спектральная функция и спектральная плотность случайного процесса, их свойства и приложение. Случайный процесс типа «белый шум».

Пуассоновский случайный процесс. Сложный пуассоновский процесс, процесс с переменной интенсивностью. Процессы восстановления;

Гауссовский (нормальный) случайный процесс, его свойства.

Марковский случайный процесс. Дискретная марковская цепь. Переходные вероятности. Уравнения Колмогорова–Чепмена. Однородные дискретные марковские цепи. Классификация состояний дискретной марковской цепи, теорема о «солидарности» их свойств.

Асимптотическое поведение дискретной марковской цепи. Предельное и стационарное распределения вероятностей состояний дискретной марковской цепи. Теоремы об эргодичности дискретных марковских цепей.

Марковская цепь с непрерывным аргументом. Прямое и обратное уравнения Колмогорова–Феллера. Примеры приложения теории марковских цепей (модели систем массового обслуживания).

Непрерывный марковский процесс. Обобщенное уравнение Маркова. Уравнения Колмогорова и Колмогорова–Фоккера–Планка. Броуновское движение (винеровский процесс).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А.* Основы теории случайных процессов: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2003. – 165 с.
2. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.
3. Случайный вектор. Учебно-методическое пособие. Составитель *Натан А.А.* – М.: МФТИ, 2003. – 29 с.
4. *Булинский А.В.* Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2010. – 216 с.
5. *Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложений. – М.: МЦНМО, 2009. – 400 с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель А.Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1996. – 320 с
2. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 446 с.
3. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир. 1969. – 400 с.
4. *Розанов Ю.А.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1979. – 1984 с.
5. *Климов Г.П., Кузьмин А.Л.* Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями. – М.: изд. МГУ, 1985. – 232 с.
6. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

## ЗАДАЧИ по курсу «Случайные процессы».

1. Пусть случайный процесс  $X(t) = x(\omega; t)$  задан на вероятностном пространстве  $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ , где:  $\Omega = \{1, 2\}$ ,  $\mathcal{F}$  – множество всех подмножеств множества  $\Omega$ ,  $\mathcal{P}$  приписывает вероятности, равные  $1/2$ , одноэлементным множествам  $\{1\}$  и  $\{2\}$ . Пусть множество значений параметра  $t$  есть отрезок  $[0, 1]$  и  $x(\omega, t) = \omega \cdot t$ . Найти реализации случайного процесса  $X(t)$  и его семейство конечномерных распределений.

2. Пусть случайный процесс  $X(t) = x(\omega; t)$  определен на вероятностном пространстве  $\langle \Omega, \mathcal{B}, \mathcal{P} \rangle$  где  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}$  –  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств множества  $\Omega$ ,  $\mathcal{P}$  – мера Лебега. Пусть  $t \in (0, 1)$  и  $x(\omega, t) = 1$  при  $t \leq \omega$ ,  $x(\omega, t) = 0$  при  $t > \omega$ . Найти реализации случайного процесса  $X(t)$  и его двумерные распределения.

3. Пусть  $X$  – случайная величина с функцией распределения  $F(x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Найти семейство конечномерных распределений случайного процесса  $Y(t) = X + t$ .

4.  $X$  – случайная величина с равномерным распределением на интервале  $(0, 1)$ . Найти вид реализаций, распределения сечений, системы конечномерных распределений, моментные функции (функцию математического ожидания, корреляционную функцию) случайных процессов:

а)  $Y(t) = X \cdot t + a$ ; б)  $Z(t) = X + t$ ;  $a$  – неотрицательная неслучайная величина,  $t \in [0, \infty)$ .

5. Найти вид реализаций, систему конечномерных распределений, моментные функции (математическое ожидание, корреляционную функцию) пуассоновского случайного процесса.

6. Показать, что для нормального случайного процесса функция математического ожидания  $m = m(t)$  и корреляционная функция  $R = R(t_1, t_2)$  вполне задают систему конечномерных распределений процесса.

7. Пусть  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $1/2$ ,  $t > 0$ . Найти семейство конечномерных распределений случайного процесса  $Z(t) = (X + Y) / t$ .

8. Случайная величина  $\xi$  принимает значения -1 и 1 с равными вероятностями. Найти двумерные распределения процесса

$$X(t) = e^{\xi t}, \quad t \in [0, 1]$$

и его корреляционную функцию.

9. Пусть  $X$  и  $Y$  – случайные величины, причем  $Y$  имеет симметричное относительно нуля распределение,  $P\{Y = 0\} = 0$ . Найти вероятность того, что реализации случайного процесса  $Z(t) = X + t(Y + t)$ ,  $t \geq 0$ , возрастают.

10. Найти корреляционную функцию случайного процесса  $X(t) = \sum_{i=1}^n Y_i q_i(t)$ , где  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  – неслучайные функции,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  – некоррелированные случайные величины с дисперсиями  $d_1, d_2, \dots, d_n$  соответственно.

11. Пусть  $X_1(t), \dots, X_n(t)$  – независимые случайные процессы с функциями математического ожидания  $MX_i(t) = m_i(t)$  и с корреляционными функциями  $R_{X_i}(t_1, t_2)$ . Найти функцию математического ожидания и корреляционную

функцию случайного процесса  $Y(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$ .

12. Пусть  $X_1(t), X_2(t)$  – два независимых случайных процесса с корреляционными функциями  $R_{X_1}(t_1, t_2)$  и  $R_{X_2}(t_1, t_2)$ . Найти корреляционную функцию случайного процесса  $Y(t) = X_1(t)X_2(t)$ .

13. Пусть  $X \in N(m, \sigma)$ ,  $b$  – вещественное число. Найти корреляционную функцию случайного процесса  $Y(t) = Xt + b$ ,  $t \geq 0$ .

14. Пусть  $A, X, V$  – случайные величины такие, что  $V$  не зависит от  $A$  и  $X$ ,  $A \geq 0$ ,  $X \geq 0$ ,  $V$  равномерно распределена на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $A$  и  $X$  имеют совместное распределение с функцией плотности распределения  $f(a, x)$ . Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса  $Z(t) = A \cos(Xt + V)$ ,  $t \geq 0$ . Является ли данный случайный процесс стационарным?

15. Случайный процесс  $X(t)$  имеет вид  $X(t) = A + Bt$ , где  $A$  и  $B$  – независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке  $[0, 1]$ ,  $t \geq 0$ . Вычислить вероятность  $P(A)$  случайного события

$$A = \{0 < X(1) < 0.50\} \cap \{0.50 < X(2) < 0.75\} \cup \{0.50 < X(1) < 1.00\} \cap \{0.25 < X(2) < 0.75\}.$$

16. Пусть для корреляционной функции  $R_X(t_1, t_2)$  случайного процесса  $X(t)$  выполняется условие: для пары  $t'_1, t'_2$

$$\exists \vec{b} = (b_1, b_2)' \quad (\vec{b} \neq \vec{0}): \vec{b}' \begin{pmatrix} R_X(t'_1, t'_1) & R_X(t'_1, t'_2) \\ R_X(t'_2, t'_1) & R_X(t'_2, t'_2) \end{pmatrix} \vec{b} = 0.$$

Как это условие отражается на свойствах случайного процесса?

17. Показать, что любая функция двух аргументов вида

$$\psi(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2)$$

( $a_i \geq 0$ ,  $\varphi_i(t)$  – любые неслучайные действительные функции) обладает свойствами корреляционной функции.

18.  $X$  и  $Y$  – независимые случайные величины с распределениями вероятностей:  $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=P\{Y=1\}=P\{Y=-1\}=0,5$ . Является ли случайный процесс

$$Z(t) = X \cos \gamma t + Y \sin \gamma t.$$

( $\gamma$  – неслучайная величина) стационарным а) в широком смысле; б) в узком смысле?

19. Пусть  $X(t)$ ,  $t \geq 0$ , – пуассоновский случайный процесс с параметром  $\lambda$ . Доказать, что случайный процесс  $Y(t) = X(t+1) - X(t)$ ,  $t \geq 1$  является стационарным в широком смысле.

20. Является ли стационарной последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин?

21. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

22. Пусть  $X(t)$  – стационарный случайный процесс,  $Y$  – случайная величина. Является ли случайный процесс  $Z(t) = X(t) + Y$  стационарным?

23. Пусть  $X(t)$  – стационарный (в широком смысле) дифференцируемый в среднем квадратическом случайный процесс. Является ли стационарным случайный процесс  $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ ? Являются ли процессы  $X(t)$  и  $Y(t)$  взаимно стационарными?

24. Показать, что для эргодичности по математическому ожиданию стационарного случайного процесса  $X(t)$  с корреляционной функцией  $R_X(\tau)$  достаточно выполнения условия  $R_X(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$ .

25. Будет ли случайный процесс  $\xi(t) = \frac{W(t)}{\sqrt{t}}$  эргодичен по дисперсии. Здесь  $W(t)$  – винеровский процесс.

26. Будет ли случайный процесс  $\eta(t) = \frac{K(t)}{t}$  эргодичен по математическому ожиданию. Здесь  $K(t)$  – пуассоновский процесс.

27. Случайный процесс  $X(t)$  может принимать только два значения:  $+1$  и  $-1$ .  $P\{X(0) = 1\} = P\{X(0) = -1\} = \frac{1}{2}$ . Переключение с одного значения на другое происходит в случайный момент времени  $\omega$  ( $\omega$  и  $X(0)$  взаимно независимы).  $\omega$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . Будет ли случайный процесс  $X(t)$  эргодичным по математическому ожиданию? Вычислите  $R_X(t_1, t_2)$ .

28. Случайный процесс  $Y(t)$  задан в виде  $Y(t) = X(t) \cdot X(t + t_0)$ , где  $t_0$  – заданное число,  $t \geq 0$ ,  $X(t)$  – гауссовский центрированный стационарный в широком смысле случайный процесс, имеющий непрерывную корреляционную функцию  $R_X(\tau)$  ( $\tau = |t_1 - t_2|$ ), причем  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = 0$ . Исследовать случайный процесс  $Y(t)$  на стационарность и эргодичность, найти его корреляционную функцию. (Учесть, что для системы нормально распределенных центрированных случайных величин  $X_1, X_2, X_3, X_4$  справедливо соотношение

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4) = R_{12}R_{34} + R_{13}R_{24} + R_{14}R_{23}$$

, где  $R_{ij} = M(X_i X_j)$  при  $i \neq j$ ).

29. Случайный процесс  $X(t)$  имеет вид  $X(t) = b \sin(\gamma t + \varphi)$ , где  $b, \gamma$  – известные числа,  $\varphi$  – случайная величина с функцией плотности распределения  $f(x)$ ,  $t \geq 0$ . Исследовать случайный процесс  $X(t)$  на стационарность и на эргодичность по математическому ожиданию в следующих случаях: а)  $f(x) = \cos x$  при  $x \in [0, \pi/2]$ ,  $f(x) = 0$  при  $x \notin [0, \pi/2]$ ; б)  $f(x) = 1/2\pi$  при  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $f(x) = 0$  при  $x \notin [0, 2\pi]$ .

30.  $X(t)$  – случайный процесс с корреляционной функцией,  $R_X(t_1, t_2) = a^{-b|t_1 - t_2|}$ ,  $Y$  – независимая от  $X(t)$  случайная величина с дисперсией

$\sigma_Y^2 > 0$ . Являются ли эргодичными по математическому ожиданию процессы  $X(t)$  и  $Z(t) = X(t) + Y$ ?

31. Показать, что функция  $R(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|} \cos \beta\tau$ , где  $a, \beta, \sigma$  – некоторые положительные постоянные, может быть корреляционной функцией непрерывного в среднем квадратическом и стационарного в широком смысле случайного процесса. Определить спектральную плотность, соответствующую такой корреляционной функции.

32. Проверить, что функция  $R(\tau) = a^{-b|\tau|}$ ,  $b > 0$ , является корреляционной функцией некоторого случайного процесса. Найти его спектральную плотность.

33. Найти спектральную плотность случайного процесса  $X(t)$ , корреляционная функция которого имеет вид

$$R(t) = ce^{-\alpha|t|}, \quad c, \alpha > 0, \quad t \in R.$$

34. Пусть  $X(t) = x(\omega; t)$  – случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве  $\langle \Omega, F, P \rangle$ . Доказать, что если множество  $\Omega$  счетно и все одноточечные его подмножества имеют положительные вероятности, то стохастическая непрерывность случайного процесса  $X(t)$  эквивалентна условию непрерывности всех его траекторий.

35. Пусть  $X(t), t \geq 0$  – случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и с корреляционной функцией вида  $R(t; s) = e^{st}$ . Доказать, что данный случайный процесс бесконечно дифференцируем в среднем квадратическом.

36. Исследовать на дифференцируемость в среднем квадратическом случайный процесс  $X(t) = e^{-\alpha t} \sin(\gamma t + \varphi)$ , где  $\alpha, \gamma$  – известные числа,  $\varphi$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $t \geq 0$ .

37. Найдите математическое ожидание и дисперсию стохастического интеграла

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} dW(t, \omega),$$

где  $W(t, \omega)$  – винеровский процесс,  $\alpha$  – положительная неслучайная константа.

38. Определить  $M[\eta^2(t)]$ , где

$$\eta(t) = \int_0^t \tau^2 dK(\tau),$$

где  $K(\tau)$  – пуассоновский случайный процесс интенсивности  $\lambda$ .

39. Показать, что поток событий является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda$  тогда и только тогда, когда временной интервал между соседними событиями имеет показательное распределение с математическим ожиданием  $MX = \lambda^{-1}$ .

40. Точечный случайный процесс  $X(t)$  представляет собой результат сложения  $r$  независимых пуассоновских потоков событий с интенсивностями  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$ . Определить тип и параметры процесса  $X(t)$ .

41. Пусть задан пуассоновский поток событий  $X(t)$  с интенсивностью  $\lambda$ . Представим этот поток в виде  $r$  подпотоков  $\{X_i(t)\}_{i=1}^r$ , ( $X(t) = \sum_{i=1}^r X_i(t)$ ) путем отнесения каждого события из  $X(t)$  к подпотoku  $X_i(t)$  с вероятностью  $p_i$  (независимо от других событий),  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ . Определить тип и параметры случайных процессов  $\{X_i(t)\}_{i=1}^r$ .

42. Пусть  $X(t)$  – пуассоновский случайный процесс с интенсивностью  $\lambda$  и  $Y(t)$  – случайный процесс, полученный в результате удаления из  $X(t)$  всех событий, очередной номер которых не кратен  $s$ . Определить тип и параметры распределения интервала между соседними событиями в случайном процессе  $Y(t)$ .

43. Деятельность коммерческой фирмы состоит в выполнении потока сделок, реализуемых в случайные моменты времени  $t = t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ . Каждая  $k$ -ая сделка приносит фирме прибыль, представляющую собой случайную величину  $V_k$  с математическим ожиданием  $m$  и с дисперсией  $\sigma^2$ . Поток сделок описывается пуассоновским процессом с интенсивностью  $\lambda$ . Найти математическое ожидание и дисперсию суммарной прибыли, получаемой фирмой к моменту  $t$ . Используя предельную теорему, оценить вероятность получения суммарной прибыли к моменту  $t = t^*$  не ниже  $Q^*$  (положить:  $\lambda = 1$ ,  $t^* = 100$ ,  $m = 4$ ,  $\sigma^2 = 9$ ,  $Q^* = 250$ ).

44. В задаче 58 случайная величина  $V_k$  с вероятностью  $p$  принимает значение 1 («успешная сделка») и с вероятностью  $q = 1 - p$  – значение 0 («безуспешная сделка»). Найти тип и параметры потока успешных сделок.

45. Пусть  $X(t)$  – нормальный (гауссовский) случайный процесс с корреляционной функцией  $R_X(t_1, t_2) = be^{-a|t_1 - t_2|}$ ,  $b > 0$ ,  $a > 0$ . Проверить существование производной  $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$  в среднем квадратическом, найти распределение случайного процесса  $Y(t)$  и взаимную корреляционную функцию процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$ .

46. Пусть  $X(t)$  – нормальный (гауссовский) случайный процесс с математическим ожиданием  $m_X(t) = m = \text{const}$  и корреляционной функцией  $R_X(t_1, t_2) = be^{-a|t_1 - t_2|}$ ,  $b > 0$ ,  $a > 0$ . Найти вероятность  $P\{X(t'') > c\}$ , если  $X(t') = x'$  (величины  $c$  и  $x'$  заданы).

47. Пусть  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))'$  –  $n$ -мерный нормальный стационарный векторный случайный процесс с известными моментными функциями – вектором математических ожиданий его компонент  $MX(t) = (MX_1(t), \dots, MX_n(t))'$  и матрицей корреляционных функций  $R(t_1, t_2) = (R_{ij}(t_1, t_2))$ , где при  $i = j$   $R_{ii}(t_1, t_2)$  – корреляционная функция случайного процесса  $X_i(t)$  и при  $i \neq j$   $R_{ij}(t_1, t_2)$  – взаимная корреляционная функция случайных процессов  $X_i(t)$  и  $X_j(t)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Найти распределение скалярного случайного процесса  $X_n$  в момент времени  $t = t''$  при известных значениях случайных процессов  $X_1(t), \dots, X_{n-1}(t)$  в момент  $t = t'$ .

48. Пусть  $X(t) = (X_1(t), X_2(t))'$  – двухмерный нормальный стационарный векторный случайный процесс с известными моментными функциями:  $MX(t) = (MX_1(t), MX_2(t))'$ , корреляционными функциями  $R_{X_1}(t_1, t_2)$ ,  $R_{X_2}(t_1, t_2)$  и взаимной корреляционной функцией  $R_{X_1, X_2}(t_1, t_2)$  его компонент. Найти вероятность  $P\{X_2(t'') > c\}$ , если  $X_1(t') = d$  (величины  $c$  и  $d$  заданы).

49. Урна содержит в начальный момент  $m$  белых и  $k$  черных шаров. Опыт состоит в последовательности шагов с извлечением из урны на каждом  $n$ -ом шаге одного шара, его возвращением в урну и добавлением в неё одного шара того же цвета. Пусть событие  $A_n$  обозначает извлечение белого шара на  $n$ -ом шаге, а событие  $B_n(r)$  – нахождение в урне на  $n$ -ом шаге  $r$  белых шаров. Являются ли последовательности  $\{A_n\}$  и  $\{B_n(r)\}$  марковскими?

50. Однородная дискретная марковская цепь  $X(t)$  с множеством состояний  $S$  имеет известные переходные вероятности

$$p_{ij} = P\{X(t+1) = j / X(t) = i\}, i, j \in S.$$

Найти распределение вероятностей состояний процесса в момент  $t+1$ , если а) известно состояние процесса в момент  $t$ ; б) известно распределение вероятностей состояний процесса в момент  $t$ ; в) известно состояние процесса в момент  $t-1$ .

51. Товар определенного типа продается магазином поштучно в порядке очереди (по записи). Число покупателей  $U(r)$ , записывающихся в очередь в течение  $r$ -го интервала времени ( $r = 1, 2, \dots$ ) – случайная величина; случайные величины  $\{U(r)\}$  независимы в совокупности. В начале каждого интервала времени на продажу в магазин поступает один экземпляр товара при условии, что очередь на его покупку не пуста. Является ли длина очереди, фиксируемая в конце каждого интервала времени, марковской цепью?

52. Показать, что для дискретной марковской цепи при  $t_1 < t_2 < t_3$  одновременно справедливы равенства

$$\begin{aligned} \text{а) } P\{X(t_3) = x_3 | X(t_2) = x_2, X(t_1) = x_1\} &= \\ &= P\{X(t_3) = x_3 | X(t_2) = x_2\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P\{X(t_1) = x_1, X(t_3) = x_3 | X(t_2) = x_2\} &= \\ &= P\{X(t_1) = x_1 | X(t_2) = x_2\} P\{X(t_3) = x_3 | X(t_2) = x_2\}; \end{aligned}$$

$$\text{в) } P\{X(t_1) = x_1 | X(t_2) = x_2, X(t_3) = x_3\} = P\{X(t_1) = x_1 | X(t_2) = x_2\}.$$

53. Пусть последовательность  $X_0, X_1, \dots, X_n$  – дискретная марковская цепь. Является ли марковской последовательность  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_0$ ?

54. Пусть  $X_0, X_1, \dots$  – последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковую функцию плотности распределения  $f(x): f(x) > 0, -\infty < x < \infty$ . Является ли последовательность  $\{Y_n\}$  марковской, если:

$$\text{а) } Y_n = X_n, n=0, 1, 2, \dots, \text{ б) } Y_n = \sum_{i=0}^n X_i, n=0, 1, \dots, \text{ в) } Y_n = \max\{0, X_0, X_1, \dots, X_n\}?$$

Для марковских цепей найти переходные вероятности за один шаг.

55. Пусть  $X_0, X_1, \dots$  и  $Y_0, Y_1, \dots$  – две марковские цепи. Будет ли марковской цепью последовательность  $X_0 + Y_0, X_1 + Y_1, \dots$ ?

56. Пусть последовательность случайных величин  $X_0, X_1, \dots$  образует марковскую цепь. Доказать, что любая подпоследовательность последовательности  $X_0, X_1, \dots$  также является марковской цепью.

57. Известно, что дискретная марковская цепь полностью определяется начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за один шаг. Определяется ли дискретная марковская цепь начальным распределением и матрицей вероятностей перехода за два шага?

58. Пусть  $X_0, X_1, \dots$  – последовательность случайных величин, образующих марковскую цепь,  $\psi(x)$  – некоторая функция. Будет ли последовательность  $\psi(X_0), \psi(X_1), \dots$  марковской цепью?

59. Дискретная марковская цепь имеет следующую матрицу вероятностей перехода за один шаг:

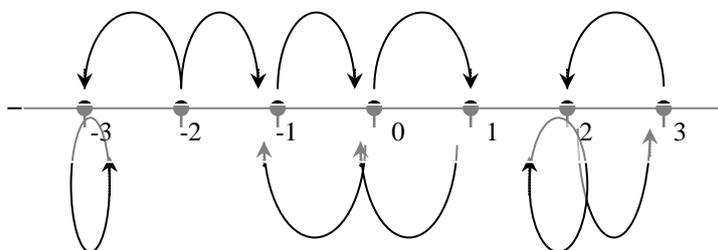
$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

Найти матрицу вероятностей перехода за  $n$  шагов и предел при  $n \rightarrow \infty$ .

60. Пусть  $X_0, X_1, \dots$  – последовательность случайных величин, образующие однородную дискретную марковскую цепь. Доказать, что для того, чтобы случайные величины  $X_0, X_1, \dots$  были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы все строки матрицы вероятностей перехода за один шаг были одинаковыми.

61. Пусть  $X_0, X_1, \dots$  – последовательность попарно независимых (не обязательно независимых в совокупности) случайных величин. Образуют ли они дискретную марковскую цепь?

62. Классифицировать состояния дискретной марковской цепи, изображенные на графике (стрелками изображены переходы, имеющие ненулевые вероятности).



63. Однородная дискретная марковская цепь с тремя состояниями  $S = \{0, 1, 2\}$  имеет матрицу одношаговых переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0 & 0,75 \end{pmatrix}.$$

Классифицировать состояния цепи.

64. Классифицировать состояния однородной дискретной марковской цепи с счетным множеством состояний  $S = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ , имеющей матрицу одношаговых переходных вероятностей

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0,5 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

65. Показать, что в неразложимой однородной дискретной марковской цепи с нулевыми состояниями для  $\forall i, j \quad p_{ij}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

66. Доказать, что в конечной неразложимой однородной дискретной марковской цепи все состояния – ненулевые.

67. Доказать, что неразложимая дискретная марковская цепь, у матрицы переходных одношаговых вероятностей которой хотя бы один диагональный элемент положителен, не может быть периодической. Может ли неразложимая дискретная марковская цепь, у матрицы одношаговых переходных вероятностей которой все диагональные элементы суть нули, быть непериодической?

68. Пусть  $X_0, X_1, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения  $-1$  и  $+1$  с вероятностями  $p$  и  $q = 1-p$  соответственно. Выяснить, будет ли последовательность случайных величин  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n, \dots$  марковской цепью, если положить

$$a) Y_n = X_n X_{n+1}; \quad б) Y_n = \max_{0 \leq i \leq n} X_i; \quad в) Y_n = \prod_{i=0}^n X_i.$$

69. Проведение некоторого эксперимента состоит в осуществлении большого числа шагов. На каждом шаге может быть выбрано одно из двух возможных действий. Каждое действие может привести как к успеху, так и к неудаче данного шага. Существуют вероятности успеха  $p_1$  и  $p_2$  первого и второго действий соответственно и вероятности их неудач  $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2$ , которые экспериментатору неизвестны. Цель экспериментатора состоит в максимизации математического ожидания числа успехов в эксперименте в целом.

Сравнить две стратегии проведения эксперимента: а) равновероятный выбор на каждом шаге каждого действия; б) повторение на следующем шаге действия, приведшего к успеху на предшествующем шаге, и смена действия, приведшего к неудаче.

70. Рассмотрите дискретную марковскую цепь со счетным числом состояний  $\{0, 1, 2, \dots\}$  и вероятностями переходов

$$p(m, m+1) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{m+2} \right) \quad \forall m \geq 0,$$

$$p(m, m-1) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{m+2} \right) \quad \forall m \geq 1,$$

$$p(0, 0) = 1 - p(0, 1) = \frac{3}{4}.$$

Найдите стационарное распределение вероятностей.

71. Рассмотрите дискретную марковскую цепь со счетным числом состояний  $\{1, 2, \dots\}$  и вероятностями переходов

$$p(m, m+1) = \frac{m}{2m+2} \quad \forall m \geq 1,$$

$$p(m, m-1) = \frac{1}{2} \quad \forall m \geq 2,$$

$$p(m, m) = \frac{1}{2m+2} \quad \forall m \geq 2,$$

$$p(1, 1) = 1 - p(1, 2) = \frac{3}{4}.$$

Покажите, что для заданной дискретной марковской цепи нет стационарного распределения вероятностей.

72. Предположим, что на некотором шоссе поток автомобилей можно считать пуассоновским с интенсивностью 30 машин в минуту. Выпишите вероятность того, что пройдет более  $N$  секунд, пока мимо поста наблюдения проедут  $n$  автомобилей.

73. Рассмотрите марковскую цепь в непрерывном времени с двумя состояниями. Пусть время нахождения цепи в первом состоянии есть экспоненциальная случайная величина с интенсивностью  $\lambda$ , время нахождения цепи во втором состоянии – экспоненциальная случайная величина с интенсивностью  $\mu$ . Найдите стационарное распределение вероятностей.

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\langle \Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$  – вероятностное пространство ( $\Omega$  – множество исходов,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра,  $\mathcal{P}$  – вероятностная мера);

$MX(t)$  – математическое ожидание случайного процесса  $X(t)$ ;

$DX(t)$  – дисперсия случайного процесса  $X(t)$ ;

$R_X(t_1, t_2)$  – корреляционная функция случайного процесса  $X(t)$ ;

$N(m, \sigma^2)$  – нормальное распределение с параметрами:  $m$  (математическое ожидание) и  $\sigma^2$  (дисперсия);

$Po(\lambda)$  – распределение Пуассона с параметром (интенсивностью)  $\lambda$ ;

$\Phi^*(\cdot)$  – функция распределения стандартного нормального распределения  $N(0, 1)$ ;

$\overset{0}{X}(t)$  – центрированный случайный процесс;

$'$ ,  $T$  – знаки транспонирования (вектора, матрицы).