Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Московский физико-технический институт

(государственный университет)»

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по учебной работе

и довузовской подготовке

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.А. Воронов

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2019 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ**

 **ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА**

по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика**

 **и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 2

семестры: 4

Трудоёмкость:

вариативная часть – 2 зач. ед.,

лекции – 30 часов Диф. зачет – 4 семестр

практические (семинарские) занятия – 15 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 45 Самостоятельная работа – 42 часов

# Программу составил: д.ф.-м.н., профессор Э.Н. Гордеев

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

11 января 2019 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

**Часть I. Задачи дискретного анализа, связанные**

**с представлением информации**

1. Информация и алгоритм. Объекты, информационные объекты. Проблемы представления информации. Примеры.
2. Требования к кодам объектов. Признаковое кодирование и тесты. Связь языка признаков с булевыми функциями и проблемой выполнимости. Примеры нахождения значения и оценок длины минимального теста для (0,1)-матриц. Теорема о длине минимального теста для «почти всех» матриц заданного размера.
3. Множества и характеристические векторы. Экстремальные проблемы теории конечных множеств.
4. Кодирование слов. Сравнение слов. Колмогоровская сложность. Теорема об алгоритмической невычислимости функции, измеряющей сложность слова относительно какой-нибудь универсальной МТ.
5. Производящие функции. Свойства функционала coeff. Примеры.
6. Примеры кодирования слов. Сериальное кодирование. Комбинаторные задачи, связанные с сериальным кодированием. Кодирование натуральных чисел. Коды Элайеса и Левенштейна.

**Часть II. Задачи дискретного анализа, связанные**

**со словарной моделью анализа информации**

1. Слова и фрагменты. Комбинаторные задачи, связанные со свойствами фрагментов в словах и их количеством.
2. Проблема восстановления объекта по частичной и/или неполной информации. Словарная модель анализа информации.
3. Логический перманент. Алгоритм построения класса эквивалентности двоичного слова.
4. Биномиальные коэффициенты от слов.
5. Распознавание слов по подсловам. Условия однозначности распознавания. Биномиальные коэффициенты и позиции единиц в слове.

**Часть III. Задачи дискретного анализа, связанные**

**с измерением информации**

1. Префиксное кодирование. Алгоритм дешифруемости.

Префиксные коды и q-арные деревья. Примеры.

1. Неравенство Крафта. Теорема о существовании дешифруемого префиксного кода.
2. Стоимость кодирования. Кодирование случайного источника. Энтропия по Хартли и энтропия по Шеннону. Соотношение между ними. Некоторые свойства энтропии по Шеннону.
3. Комбинаторные задачи и «энтропийные рассуждения».
4. Первая теорема Шеннона.
5. Примеры алгоритмов «сжатия» информации: алгоритм Шеннона–Фано, алгоритм Хаффмена, блочные коды, арифметические коды. Оптимальность алгоритма Хаффмена.
6. Теорема Шеннона для блочных кодов. Альтернативные формулировки теоремы.

**Часть III. Задачи дискретного анализа, связанные**

**с восстановлением искаженной информации**

1. Модель передачи информации по каналу с шумом. Типы каналов с шумом. Примеры кодов, исправляющих выпадения, вставки и замены одиночных символов.
2. Двоичный симметричный канал. Принцип наибольшего правдоподобия. Принцип избыточности. Алгоритм исправления ошибок на основе таблицы декодирования.
3. Корректирующие способности кодов. Теоремы Хэмминга, Джоши, Плоткина и Варшамова–Гильберта.
4. Комбинаторные проблемы, связанные со свойствами булева куба и расположением объектов в булевом кубе.
5. Доказательство второй теоремы Шеннона.
6. Примеры кодов. Линейные коды. Спектр. Теорема Мак-Вильямс (без доказательства). Коды Хэмминга и Мак-Дональда и их свойства.

**Примечания**.

1. Примеры и задачи с решениями будут даваться на лекциях на протяжении всего курса.
2. Рассмотрение пяти из вышеприведенных вопросов будет больше похоже на семинарские занятия с обратной связью и домашними заданиями. Это следующие пункты: 3, 5, 7, 17, 22.
3. Контрольная работа проводится на последней неделе апреля.
4. Задание сдается в мае.
5. Для получения оценки «4» автоматом необходимо посещать лекции, делать ДЗ, получить оценку «5» по контрольной работе и сдать задание.
6. Для получения оценки «5» необходимо решить дополнительные задачи повышенной трудности на контрольной работе и сдать задание с дополнением.
7. Дополнение к заданию (10 задач повышенной трудности) выдается желающим на предпоследней лекции.

**Литература**

1. *Леонтьев В.К.* Комбинаторика и информация. Часть 1. Комбинаторный анализ. – М.: МФТИ, 2015.
2. *Леонтьев В.К.* Комбинаторика и информация. Часть 2. Информационные модели. – М.: МФТИ, 2016.
3. *Гордеев Э.Н.* Основы теория информации. Курс лекций. Электронное учебное пособие. –М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010.

**Дополнительная литература**

1. *Леонтьев В.К.* Теория кодирования. – М., Знание, 1977.
2. *Леонтьев В.К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. – М.: МГТУ

 им. Н.Э. Баумана, 2001.

1. *Потапов В.Н.* Теория информации. Кодирование вероятностных источников: уч. пособие. Новосибирский государственный университет. -- Новосибирск, 1999.
2. [*Питерсон*](http://padabum.com/search.php?author=%D0%A3.%20%D0%9F%D0%B8%D1%82%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%BE%D0%BD) *У.,*  [*Уэлдон*](http://padabum.com/search.php?author=%D0%AD.%20%D0%A3%D1%8D%D0%BB%D0%B4%D0%BE%D0%BD) *Э.* Коды, исправляющие ошибки. – М.: Мир, 1976.
3. *Соловьева Ф.И.* Введение в теорию кодирования: учеб. пособие. – Новосибирск, 2006.
4. *Райзер Г.Дж.* Комбинаторная математика. – М.: Мир, 1966.
5. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1/. под общей редакцией С.В. Яблонского и О.Б Лупанова. – М.: Наука, 1974.

**ЗАДАНИЕ**

## **Экстремальные задачи теории конечных множеств**

1. Можно ли разбить множество  на два непересекающихся подмножества  с условием  ? Здесь  – множество значений, которое принимает функция  (расстояние Хэмминга) на A.

2. Найти число решений уравнения:

 a) , где ;

 b) , где  и ;

 c) , где .

 Здесь – система всех подмножеств множества A,  – система всех k элементных подмножеств множества A.

3. Пусть где  - система подмножеств множества , удовлетворяющих условию . Доказать, что число таких систем подмножеств равно .

4. Пусть  и  удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных ниже свойств:

 a) , ;

 b) , ;

 c) , .

 Показать, что .

5. Пусть , , ; ,  . Доказать, что .

## **Комбинаторные задачи на булевом кубе.**

1. Сколько точек может содержать пересечение двух шаров радиуса единица в ?

2. Показать, что в  можно указать не более чем  шаров радиуса *t,* которые покрывают все вершины куба.

3. (a,b). Пусть  Найти:

 a) число векторов из , ортогональных ;

 b) минимальное число ненулевых векторов из  с условием, что каждый вектор из  ортогонален хотя бы одному из выбранных.

4. (a,b). Найти:

 a) число *k*-мерных подпространств пространства ;

 b)\* число *k*-мерных подпространств пространства , содержащих заданную точку 

## **Кодирование комбинаторных объектов.**

## **Тесты. Кодирование слов.**

1. Найдите:

 а) число бинарных слов длины *n*, имеющих ровно *k* серий;

 б) число бинарных слов длины *n*, имеющих ровно *k* единичных серий;

 в) число слов длины *n* над алфавитом  имеющих ровно *k* серий.

2. Пусть tn(m,k) – число слов из Bn веса m, имеющих ровно k серий. Найти tn(m,k).

3. Доказать верхнюю границу для числа тупиковых тестов r(n) таблицы с n столбцами: .

4. Найти El(12167).

5. Найти Lev(50224).

6. Найти набор натуральных чисел, если El(x)=10110110000101100100100000010100100110.

7. Найти набор натуральных чисел, если Lev(x)=01001110000111100001001111010001101.

## **Информация и энтропия.**

1. Множество *B* бинарных слов называется префиксным, если никакое слово из *B* не является началом другого слова из этого же множества.

 Пусть *li  –* слов длины *i* во множестве *В.* Доказать (не используя неравенство Крафта!) неравенство 

2. Проверить неравенство Крафта и построить префиксный код при q=3 с длинами слов: 1,1,3,3,4,4.

3. Построить два кода: Шеннона и Хаффмена. Вероятности букв: 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.1, 0.1, 0.06, 0.05, 0.05, 0.04. Найти стоимость кодирования и энтропию.

4. Вероятность 0 – 2/5, вероятность 1 - 3/5. Построить блочный код Хаффмена (до длины блока – 3). Найти стоимость кодирования и энтропию.

5. Доказать свойство возрастания энтропии при «сглаживании». (Переход от источника A к новому источнику A`(W), W – подмножество букв A. Вероятности появления букв, не входящих в W не изменяются. А все буквы, входящие в W, в новом источнике равновероятны с .

## **Комбинаторика слов.**

1. Пусть  – бинарное слово. Показать, что:

 а) число фрагментов вида (11) в слове *a* равно , где  – число единиц в слове *a;*

 б) число фрагментов вида (01) в слове *a* равно 

2. Пусть  Слово  над алфавитом *A* называется монотонным, если  Найти число монотонных слов длины *n* над алфавитом *A*.

3. Пусть  – бинарное слово. Найти:

 а) общее число фрагментов слова ;

 б) число различных фрагментов слова 

4. Найти Va, если n=4, a=0110, V= {v1=(12), v2=(34)}.

5. Используя теорему о количестве вхождений одного слова в другое как фрагмента перевести сериальный код 03140140 в последовательность номеров единичных позиций.

6. Пусть d(a,b) – длина наибольшего общего подслова, которое является фрагментом обоих слов a и b. D(a,b) – длина наименьшего общего надслова, которое содержит фрагментами оба слова a и b. Пусть  Доказать следующие утверждения:

1. *d(a, b) +D(a, b) = 2n;*
2. функция*–* является метрикой на *Еn.*

7. Являются ли слова a=10101 и b=01110 V– эквивалентными для V={(i,j), 1≤i<j≤5}?

8. Найти число бинарных слов длины n, не содержащих в качестве фрагмента слово (11).

9. Найти ,,.

10. Найти число слов длины n над алфавитом {0,1,2}, содержащих «0» не менее p раз.

11. Найти число различных слов, которые можно получить из бинарного слова длины n путем удаления одной буквы.

12. Найти число различных слов, которые можно получить из слова длины n в алфавите {0,1,2} путем всевозможных перестановок букв.

## **Проблемы дискретного анализа,**

## **связанные с передачей информации по каналу с шумом.**

 Пусть A(n,d) – максимальное число точек в коде из Bn с минимальным расстоянием d. Пусть B(n,d) – максимальное число точек в коде из Bn такое, что расстояние между любой парой не больше d.

1. Доказать неравенство .

2. Проверить существование (8,10,3)-кода. Проверить существование (12,220,3)-кода.

3. Доказать границу Джоши. При каких параметрах она лучше границы Хэмминга?

4. (a,b,c). Доказать соотношения:

 a) ;

 b) ;

 c)  где .

5. Пусть *G* – произвольный -код, точки которого выписаны в матрицу *A* размером . Показать, что каждый ненулевой столбец *A* содержит ровно  единиц.

6. (a,b). Пусть *G* – произвольный -код. Доказать следующие неравенства:

 a) ;

 b) .

7. Доказать следующие «общие» свойства функции 

 

 

8. Доказать, что при n≥2d-1 число проверочных символов, необходимое для того, чтобы минимальный вес линейного кода с n символами достигал значения d, равно, самое меньшее, 2d-*log*d-2.

9. Найти максимальную мощность кода в Bn, обнаруживающего одну ошибку.

10. Найти среднюю вероятность правильного декодирования для кода V={(000),(111)} при передаче по двоичному симметричному каналу с вероятностью искажения p.

11. Построить в E4 код максимальной мощности, исправляющий одну ошибку.

12\*. Что из себя представляет семейство всех k –мерных граней в *En*, содержащих фиксированную точку *a* из *En*?

## **Прочее.**

1.\* Пусть  натуральные числа из отрезка такие, что все суммы парно различны. Доказать следующие утверждения:

 a) 

 *b)* если , то множество  можно «расширить», добавив к нему ещё число из отрезка 

2. Пусть  *– n* точек на плоскости и 

 Доказать неравенство 

3. Восстановить выпавший символ 10100101. (n=8, k=9).

4. Пусть  – произвольное множество. Система подмножеств  где , , называется покрытием для , если .

 Показать, что число покрытий множества  удовлетворяет неравенству: .

5. Найти число булевых матриц размеров mxn, имеющих ровно одну нулевую строку.

6.\* Найти число булевых матриц размеров mxn, имеющих хотя бы одну нулевую строку.

Подписано в печать 17.01.2019. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 0,75

Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 160 экз. Заказ № .

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru