Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по учебной работе

и довузовской подготовке

А.А. Воронов

11 сентября 2019 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика**

**и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 1 курс магистратуры

семестры: 1, 2

Трудоёмкость:

вариативная часть – 2 зач. ед.,

лекции – 60 часов Экзамен – 1,2 семестры

практические (семинарские) занятия – 0 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа – 60 часов

# Программу составил: профессор, д.ф.-м.н. Алексеевский Д.В.,

# к.ф.-м.н. Ремизов А.О.

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

17 мая 2019 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

**Дифференциальная геометрия и её приложения**

1. **Многообразия,** два способа задания. Подмногообразия. Примеры многообразий: сфера, прямое произведение многообразий, тор, конфигурационное пространство классической системы, проективное пространство. Многообразия Грассмана и Штифеля. Плюкерово вложение многообразия Грассмана в проективное пространство. Гиперповерхности второго порядка.

2. **Группы Ли и подгруппы Ли.** Классические группы Ли и матричные группы. Фактор-группа и локально изоморфные группы Ли. Линейное представление группы. Действие группы Ли на многообразии. Три действия группы Ли на себе. G-многообразия и Эрлангенская программа Ф. Клейна. Орбиты, пространство орбит (модулей), однородные пространства. Применение – пространство шейпов Kendall'a.

3. **Однородные пространства.** Групповое описание однородных пространств. Примеры однородных пространств: сфера, многообразия Грассмана и Штифеля, пространства флагов как однородные пространства классических компактных и комплексных групп. Матричные пространства. Орбиты группы Лоренца в пространстве Минковского и конформная геометрия сферы. Пространство шейпов треугольников.

4. **Производные многообразия.** Касательное и кокасательное расслоение многообразия. Два определения касательного вектора (вектора скорости). Алгебра Ли векторных полей и уравнения первого порядка. Поток векторного поля и полные поля. Тензорные расслоения и тензорные поля. Производная Ли и формула Лейбница. Примеры тензорных полей: риманова метрики и дифференциальные p-формы. Распределения и теорема Фробениуса. Геометрия джетов (функций и кривых).

5. **Геометрия зрения.** Сигма- аппроксимация дифференциальной геометрии и мультимасштабная геометрия Кондеринка. Зрительные нейроны как фильтры. Одномерное распределение в зрительной коре V1 и джетов кривых.

6. **Дифференциальные формы.** Внешний дифференциал. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса. Симплектические, контактные и Пуассоновы структуры. Примеры контактных, симплектических и Пуассоновых многообразий. Контактная структура на $J^1(M, \mathbb{R})$ и $PT^\*M$, симплектическая структура на $T^\*M$, Пуссонова структура на $\mathfrak{g}^\*$. Гамильтонова механика.

7. **Риманова геометрия**. Индуцированные метрика и связность n-поверхности M в $\mathbb{R}^{n+k}$. Вторая квадратичная форма и главные кривизны. Риманово многообразие и связность Леви-Чивита. Тензор кривизны и секционная кривизна. Тензор Риччи. Уравнение Эйнштейна. Разложение тензора кривизны. Пространства постоянной кривизны и их модели.

8. **Геометрия касательного и кокасательного расслоений.** Лагранжева и гамильтонова механика в инвариантном изложении.

9. **Параллельный перенос и группа голономии.** Классификация групп голономии. Симметрические, келеровы и кватернионно келеровы многообразия. Главное расслоение ортонормальных реперов и связность Картана. Линейные связности. Кривизна и кручение линейной связности. Дифференциальные уравнения, ассоциированные с римановой метрикой и геометрический смысл решений.

10. **Геометрия однородных пространств.** Представление изотропии и инвариантные геометрические структуры. Однородные римановы, симплектические и контактные многообразия.

11. **Информационная геометрия**. Дивергенция Кульбака-Лейблера и метрика Фишера-Рао. Однородные статистические и Гессиановы многообразия и левосимметрические алгебры. Однородные выпуклые конусы и области.

12. **Субриманова геометрия** и главные расслоения. Субримановы геодезические. Системы Чаплыгина и поля Янга-Миллса.

13. **Полупростые группы и алгебры Ли и cимметрические пространства**.

**Литература**

1. *Гусейн-Заде С. М.* [Лекции по дифференциальной геометрии](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Gusejn-Zade2001ru.pdf). – М.: МГУ, 2001. – 54 с.

2. *Amari S-I*. Information Geometry and its Applications. – New York: Springer. – 2016. – 373 с.

**Дополнительная литература**

1. *Постников М.М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1979.

2. *Постников М.М.* Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987.

3. *Постников М.М.* Группы и алгебры Ли. – М.: Наука, 1982.

4. *Норден А.П.* Краткий курс дифференциальной геометрии.–М.: Физматгиз, 1958. – 244 с.

5. *Стернберг С.* [Лекции по дифференциальной геометрии](http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/Sternberg1970ru.djvu). – М.: Мир, 1970.

6.  *Дубровин Б.А., С.П. Новиков, Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

7. *Кобаяши Ш. Номидзу К.* Основания дифференциальной геометрии. Т 1-2. – М.: Мир, 1981.

**Введение в теорию особенностей**

1. Вводная часть: чем занимается теория особенностей. Лемма Адамара. Лемма Морса с параметрами (лемма о расщеплении особенности). Теорема деления и следствия из нее. Ряды Ньютона-Пюизё.

2. Критические точки функций нескольких переменных. Коранг и коразмерность особенности, формула произведения корангов. Критические точки корангов 1 и 2 – начало классификации Арнольда.

3. Формальные степенные ряды и гладкие функции. Лемма о представлении гладкой функции в виде суммы четной и нечетной части.

4. Алгебры, идеалы, фактор-алгебры. Локальная алгебра ростка отображения. Кратность ростков отображений и функций нескольких переменных. Теорема Тужрона.

5. Теорема Мальгранжа и некоторые следствия из нее.

6. Понятие право-левой эквивалентности отображений. Теорема Уитни об особенностях отображений плоскости на плоскость.

7. Особенности отображений плоскости на 3-мерное пространство. Зонтик Уитни. Неизолированные особенности: полукубическое ребро возврата, сложенный зонтик Уитни, ласточкин хвост.

8. Неявные дифференциальные уравнения. Поднятие уравнения на поверхность. Преобразование Лежандра. Особенности интегральных кривых.

9. Локальные нормальные формы векторных полей в вещественном и комплексном пространстве. Резонансы как препятствие линеаризации. Нормальная форма Пуанкаре-Дюлака.

10. Локальные нормальные формы векторных полей с неизолированными особыми точками. Инвариантные многообразия, принцип сведения.

11. Локальные нормальные формы неявных дифференциальных уравнений в типичных особых точках. Теоремы Чибрарио и Давыдова.

12. Геодезические как экстремали функционалов длины и действия. Особенности геодезических потоков в псевдоримановых метриках переменной сигнатуры.

**Литература**

I. **Prerequisites (подготовительный материал)**

1. *Зорич В.А*. Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012.

2. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. – М.: МЦНМО, 2011.

3. *Шафаревич И.Р., Ремизов А.О.* Линейная алгебра и геометрия. – М.: Физматлит, 2009.

4. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: МЦНМО, 2012.

II. **Обзорные или вводные источники**

1. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. – М.: Наука, 1990.

2. *Брус Дж., Джиблин П.* Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей. – М.: Мир, 1988.

III. **Книги по теории особенностей отображений**

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. – М.: МЦНМО, 2004.

2. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. – М.: Мир, 1977.

3. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. – М.: Мир, 1977.

IV. **Дополнительные источники по теории особенностей**

1. *Арнольд В.И.* Особенности и каустики волновых фронтов. – М.: Фазис, 1996.

2. *Арнольд В.И.*  Простые особенности кривых //Труды МИАН, т.226, 1999, С. 27-35.

3. *Bruce J.W., Gaffney T.* Simple singularities of maps (C,0)  (C^2,0). J. London Math. Soc. (2), 26, 1982, Р. 464-474.

4. *Zhitomirskii M.* Fully simple singularities of plane and space curves. Proc. London Math. Soc. 96:3, 2008, Р. 792-812.

5. *Wall C.T.C. Singular* Points of Plane Curves. London Math. Soc. Student Texts 63. University Press, 2004, 370 p.

V. **Книги по дифференциальным уравнениям**

1. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

2. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. –– М.: Наука, 1999.

3. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.// Итоги Науки и Техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Динамические системы, Т.1. – М.: ВИНИТИ, 1985.

**КОММЕНТАРИИ**

Данный курс является кратким введением к двум основным разделам теории особенностей (часто называемой также теорией катастроф) – теории особенностей гладких отображений (лекции 1-7) и теории особенностям дифференциальных уравнений (лекции 8-12). В последний раздел входит так называемая теория бифуркаций, уравнения с малым параметром (быстро-медленные системы) и многое другое, чего по недостатку времени мы совершенно не будем касаться, ограничившись исследованием особых точек дифференциальных уравнений без параметров и одним приложением, относящимся к геометрии геодезических.

В разделе I перечислены учебники по основным разделам математики, содержащие сведения, нужные для понимания курса (разумеется, в курсе используется совсем малая часть материала из этих учебников). Раздел II совершенно необязательный: [А-Кат] – это

Научно-популярное объяснение, чем занимается теория особенностей, доказательств (а зачастую и точных формулировок понятий и результатов) в ней не содержится. Книга [БД] также рассчитана на начинающего читателя.

Книги раздела III – фундаментальные учебники/монографии по теории особенностей гладких отображений. Основное содержание лекций 1-7 заимствовано именно из них. Книги и статьи раздела IV – дополнительное чтение по этой теме.

В разделе V перечислены книги, содержащие основные результаты по второй теме, представленной в этом курсе – теории особых точек обыкновенных дифференциальных уравнений и теории локальных нормальных форм. В разделе VI представлены книги и статьи для дальнейшего чтения по этой теме. В частности, [PaRe18] – авторский обзор серии работ, посвященных особенностям геодезических потоков на двумерных многообразиях с псевдоримановыми метриками переменной сигнатуры.

Подписано в печать 20.09.2019. Формат 60 ´ 84 1/16. Усл. печ. л. 0,75

Уч.-изд. л. 0,7. Тираж 100 экз. Заказ № 542

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru