Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А.А. Воронов
19 октября 2021 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЕ

по дисциплине: **Теория формальных систем и алгоритмов**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: математических основ управления
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
вариативная часть – 3 зач. ед.
лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия– 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа – 75 часов

Программу и задание составили:
академик РАН, проф. Ю.И. Журавлёв, чл.-корр. РАН, проф. Ю.А. Флёров, к.ф.-м.н., доцент М.Н. Вялый, к.т.н. К.В. Чувилин, к.ф.-м.н. А.А. Рубцов, к.ф.-м.н. С.А. Шестаков, к.ф.-м.н. А.В. Зухба, к.ф.-м.н. Е.Г. Молчанов.

Программа принята на заседании кафедры
математических основ управления
25 июня 2021 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

I. Исчисление высказываний

1. Булевы формулы. Тавтологии. Задачи проверки тавтологичности. Метод формальных теорий. Основные понятия исчисления высказываний. Схемы аксиом и правило вывода. Вывод в исчислении высказываний. Корректность и непротиворечивость исчисления высказываний.
2. Теорема дедукции. Лемма Кальмара.
3. Полнота исчисления высказываний.
4. Метод резолюций для проверки невыполнимости булевых формул.

II. Логика первого порядка

1. Основные понятия логики первого порядка: кванторы, термы, формулы, свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Правила оценивания формул. Интерпретации. Сигнатура и модель.
2. Общезначимые формулы. Предварённая нормальная форма. Аксиоматика и правила вывода исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов. Полнота исчисления предикатов (без доказательства). Формальные теории.
3. Элиминация кванторов.
4. Теорема Тарского–Зайденберга. Разрешимость алгебры Тарского.
5. Сколемизация. Метод резолюций для проверки общезначимости формул первого порядка.

III. Теория алгоритмов и логика

1. Разрешимость и перечислимость. Уточнение понятия алгоритма. Машины Тьюринга (МТ). Тезис Чёрча–Тьюринга.
2. Нумерация машин Тьюринга (МТ). Неразрешимость проблемы остановки МТ. Теорема Поста. Примеры неперечисленных множеств. Метод сводимостей.
3. Неразрешимость проблемы достижимости в ассоциативных исчислениях. Полугруппы, заданные образующими и соотношениями. Неразрешимость проблемы равенства в полугруппах.
4. Неразрешимость проверки общезначимости формулы.
5. Арифметические предикаты. Бета-функция Гёделя.
6. Неперечислимость истинных формул арифметики. Теорема Гёделя о неполноте: семантическая версия.

Литература

Все книги можно найти на сайте электронной библиотеки Попечительского совета мехмата МГУ:
http://lib.mexmat.ru/books/63/s2

<u>Основная</u>

1. *Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А., Вялый М.Н.* Дискретный анализ. Формальные системы и алгоритмы. Москва : ООО КонтактПлюс, 2010.
2. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Начала теории множеств. Изд. 4-е. Москва : МЦНМО, 2012.
3. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления. Москва : МЦНМО, 2012.

4. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. Изд. 4-е. Москва : МЦНМО, 2012.

Дополнительная литература

5. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. Москва : Наука, 1984.
6. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математический логике и теории алгоритмов. Москва : Физматгиз, 2004.
7. *Успенский В.А.* Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней // Математическое просвещение. 2011. № 3, вып. 15. С. 35–75.
8. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. Москва, 1983.

Задания по дисциплине «Теория формальных систем и алгоритмов»

1. Являются ли тавтологиями следующие формулы логики высказываний:

а) $(a \to (c \vee x)) \wedge (b \to (d \vee \neg x)) \to (a \wedge b \to (c \vee d))$;

б) $((\neg(z \to x) \to \neg y) \to ((\neg(z \to x) \to y) \to (z \to x))) \to (y \to z)$;

в)
$(y \to z) \to ((\neg(z \to x) \to y) \to (\neg(y \to z) \to (\neg(z \to x) \to y)))$;

г) $(\neg z \to y) \to \neg((x \to (\neg z \to y)) \to ((x \to \neg z) \to (\mathrm{x} \to \mathrm{y})))$.

2. Докажите, что если в формулу исчисления высказываний каждая переменная входит лишь один раз, то эту формулу нельзя вывести в исчислении высказываний.

3. Может ли быть аксиомой исчисления высказываний формула вида

$$(A \to B) \to ((\neg B \to C) \to (C \to A)),$$

где A, B, C – некоторые формулы?

4. Постройте вывод формул в исчислении высказываний, не используя теорему о полноте:

(а) $(\neg a \to a) \to a$; (б) $(b \to c) \to ((a \vee b) \to (a \vee c))$;

(в) $a \to b \to a \to a$; (г) $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \to (b \vee c)$.

5. Множество Γ формул исчисления высказываний таково, что из него нельзя вывести любую формулу исчисления высказываний, но из множества $\Gamma \cup \{x, y\}$ уже можно вывести любую формулу исчисления высказываний. Следует ли из этого, что из множества Γ можно вывести формулу $x \to \neg y$? (x, y – переменные).

6. Постройте опровержение резолюциями для КНФ.

(а) $(x \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (z \vee u) \wedge (z \vee \neg u)$;

(б) $(a \vee e) \wedge (\neg a \vee \neg e) \wedge (b \vee d) \wedge (\neg b \vee \neg d) \wedge$
$(a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge$
$(c \vee d \vee \neg e) \wedge (c \vee \neg d \vee e) \wedge (\neg c \vee d \vee e) \wedge (\neg c \vee \neg d \vee \neg e)$.

7. Может ли формула

$$\forall y(\forall y A(x, y) \to \forall x A(y, x)) \to \forall x(\forall y A(y, x) \to \forall x A(x, y))$$

выражать в некоторой интерпретации на целых числах предикат «$xy = 0$»?

8. Найдите формулу первого порядка, которая истинна в любой интерпретации на конечной области и ложна в некоторой интерпретации на бесконечной области.

9. Является ли общезначимой формула

$$\forall x\, \exists y A\big(f(x,y),x\big) \to \exists y A\big(f\big(f(y,y),y\big),\, f(y,y)\big)?$$

10. Найдите бескванторную формулу в алгебре Тарского $(\square, \cdot, +, =)$, которая эквивалентна формуле, выражающей предикат от четырёх параметров «существует такое z, что $"z^2 + az + b = 0$ и $z^2 + cz + d = 0"$ (*указание*: используйте свойства наибольшего общего делителя многочленов).

11. Формальная модель арифметики $(\square, \cdot, +, =)$ содержит один предикатный символ для предиката равенства и два бинарных функциональных символа для сложения и умножения. Выразите в этой модели предикаты на натуральных числах: а) «число является степенью 2»; б) «число простое»; в) «число является степенью 10» (*указание*: используйте китайскую теорему об остатках).

12. Проверьте методом резолюций общезначимость формулы

$$\exists x\, \forall y \Big(A(y) \to \Big(\big(A(x) \to D(x)\big) \to \Big(\big(D(x) \to C(x)\big) \to C(y)\Big)\Big)\Big).$$

13. Докажите, что существует алгоритм проверки равенства слов для полугруппы с двумя порождающими a, b и соотношением $aba = bab$. Оцените время работы такого алгоритма в зависимости от длины сравниваемых слов.

14. Ассоциативное исчисление содержит только правила преобразования слов вида $w \to a$, где a – символ алфавита, w – непустое слово. Докажите, что проблема до-

стижимости для такого исчисления алгоритмически разрешима.

15. Докажите, что алгоритмически неразрешима проблема достижимости для ассоциативных исчислений в алфавите из двух символов.

16. Разрешимо ли множество таких общезначимых формул первого порядка, что в формуле (а) нет функциональных символов, а все предикатные символы – унарные; (б) все предикатные и все функциональные символы – унарные?

17. Перечислимо ли множество замкнутых выполнимых формул первого порядка (выполнимая формула истинна хотя бы в одной интерпретации)?

18. Перечислимо ли множество замкнутых формул первого порядка, которые истинны хотя бы в одной интерпретации на конечной области?

Подписано в печать 19.10.2021. Формат $60 \times 84\ {}^{1}\!/\!_{16}$. Усл. печ. л. 0,5.
Тираж 160 экз. Заказ № 170.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22. E-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30. E-mail: polygraph@mipt.ru