Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А.А. Воронов
«04» августа 2022 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **математических основ управления**
курс: 3
семестры: 5

Трудоёмкость:
вариативная часть – 3 зач. ед.,
лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

Экзамен – 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Самостоятельная работа – 45 часов

Программу составили:
д. ф.-м. н., проф. К. Ю. Осипенко, д. ф.-м. н., доцент А. В. Гасников, к.ф.-м.н. А. М. Катруца, к.ф.-м.н. А. В. Зухба, к.ф.-м.н. А. В. Чернов, к.ф.-м.н. М. Г. Широбоков, Шароватова Ю.И.

Программа принята на заседании
кафедры математических основ управления
12 мая 2022 года

Заведующий кафедрой А.В. Гасников

Часть I. Выпуклый анализ

1. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка. Аффинное подпространство. Аффинная оболочка. Размерность множества.
2. Теорема Каратеодори. Теорема о выпуклой оболочке компакта в конечномерном пространстве.
3. Коническая оболочка. Теорема Каратеодори для конической оболочки.
4. Теорема Радона.
5. Теорема Хелли.
6. Теоремы отделимости в линейном нормированном пространстве.
7. Вторая теорема отделимости в конечномерном случае.
8. Аффинная независимость. Симплексы.
9. Относительная внутренность. Первая теорема отделимости в конечномерном случае.
10. Выпуклые функции. Условия выпуклости. Теорема Каруша – Куна–Таккера.
11. Субдифференциал. Субдифференциал нормы.
12. Субдифференциал выпуклой дифференцируемой функции. Теорема Ферма в субдифференциальной форме.
13. Субдифференциальное исчисление. Теорема Моро–Рокафеллара.
14. Теорема Дубовицкого–Милютина.
15. Субдифференциальная форма теоремы Каруша–Куна–Таккера.
16. Двойственное описание выпуклых замкнутых множеств.
17. Теорема о поточечной верхней грани аффинных функций.
18. Сопряженная функция. Теорема Фенхеля–Моро.
19. Двойственность экстремальных задач. Задача линейного программирования в нормальной форме и двойственная к ней.
20. Теорема о замкнутости конечнопорожденного конуса.
21. Теорема о существовании решения задачи линейного программирования.
22. Теорема о двойственности для задачи линейного программирования.
23. Различные формы задач линейного программирования и соответствующие двойственные задачи.
24. Крайние точки в задаче линейного программирования.
25. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Случай $\Delta \geq 0$ и случай $\Delta_k < 0,\ x^k \leq 0$.
26. Симплекс-метод решения задач линейного программирования (основная теорема).

Литература

Основная

1. *Осипенко К.Ю.* Выпуклый анализ: учебное пособие. – Москва : ЛЕНАНД, 2022.
2. *Осипенко К.Ю.* Выпуклый анализ. Курс лекций. 2016. (http://new.math.msu.su/department/opu/node/434)
3. *Осипенко К.Ю.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. Курс лекций, 2017. (http://new.math.msu.su/department/opu/node/464)
4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и фукционального анализа. – Москва : Физматлит, 2004.
5. *Протасов В.Ю.* Выпуклый анализ. Курс лекций, 2009. (http://new.math.msu.su/department/opu/node/354)
6. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. – Москва : Физматлит, 2007.
7. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. – Москва : УРСС, 2003.
8. *Галеев Э.М.* Оптимизация: Теория, примеры, задачи: учебное пособие. – Москва: Либроком, 2010.

Дополнительная литература

9. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – Москва : Наука, 2008.
10. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – Москва : Наука, 2011.
11. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – Москва : Физматлит, 2003.
12. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп. – Москва : ЛЕНАНД, 2014.
13. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. – Москва : МФТИ, 2014.
14. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – Москва : МФТИ, 2015.
15. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. – Москва : МФТИ, 2010.
16. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – Москва : МЦНМО, 2010.
17. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – Москва : Наука, 1978.
18. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – Москва : Наука, 1991.
19. *Воронцова Е.А., Хильдебранд Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С.* Выпуклая оптимизация: учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2021.

ЗАДАНИЕ № 1

1. Пусть $A_i, i = \overline{1, m} -$ выпуклые множества. Доказать, что их линейная комбинация $A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A_i, \alpha_i \in R, i = \overline{1, m} -$ выпуклое множество.
2. Привести пример невыпуклых множеств A и B таких, что $A + B$ является выпуклым множеством.
3. Построить пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого не является замкнутым множеством.
4. Доказать, что замыкание выпуклого множества является выпуклым.
5. Доказать, что $co\ cl\ A \subset\ cl\ co\ A$.
6. Доказать, что d-мерный симплекс в R^d содержит внутреннюю точку.
7. Пусть $A \subset R^d -$ выпуклое множество размерности d. Доказать, что A содержит внутреннюю точку.
8. При каких $p \in\ R$ множество

$$A = \{\ (x, y) \in\ R^2:\ \ |x|^p + |y|^p \leq 1\}$$

является выпуклым?

9. При каких $p \in R$ множество

$$A = \{(x, y) \in\ R^2: x > 0, y > 0,\ x^p + y^p \leq 1\}$$

является выпуклым?

10. Выяснить, являются ли выпуклыми функции

a. $f(x) = \big||x| - 1\big|$,

b. $f(x, y) = x^2 y^2$.

c. $f(x) = \ln \sum_{i=1}^{d} e^{x_i}, \quad x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d$.

11. Привести пример выпуклой функции $f(x)$ такой, что $f^2(x)$ не является выпуклой.

12. Привести пример двух выпуклых функций, суперпозиция которых не является выпуклой.

13. Решить задачу:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \to \max,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1, \qquad \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_2^2}{b^4} + \frac{x_3^2}{c^4} \le 1, \ \ a \ge b \ge c.$$

14. Решить задачу:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \to \max,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \le \delta^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 x_k^2 \le 1.$$

ЗАДАНИЕ № 2

1. Вычислить $\partial f(0)$:

a. $f(x) = \max\{x, 0\}$,

b. $f(x) = \max\{e^x, 1 - x\}$,

c. $f(x) = \max\{|x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4|, |-x_1 + x_2 + 2x_3 - 2|\}$.

2. Привести пример выпуклой замкнутой функции f и точки x^*, таких, что $|f(x^*)| < \infty$, $\partial f(x^*) = \emptyset$.

3. Решить задачу:

$$x^2 + xy + y^2 + 3|x + y - 2| \to \min.$$

4. Решить задачу:

$$x^2 + y^2 + 2\alpha|x + y - 1| \to \min, \qquad \alpha > 0.$$

5. Найти сопряженные функции от следующих функций:

a. $f(x) = e^x$,

b. $f(x) = \begin{cases} -\ln x, x > 0, \\ +\infty, x \le 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \sqrt{1 + x^T x}, \quad x \in R^d$

6. Найти сопряженные функции от следующих функций:

a. $f(x,y) = a_1 x + a_2 y + b$,

b. $f(x,y) = e^{a_1 x + a_2 y}$,

c. $f(x) = c^T x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i (x_i - a_i)^2, \quad c, x \in R^d, \lambda_i > 0, i = \overline{1,d}.$

7. Найти вторые сопряженные функции от следующих функций:

a. $f(x) = \sqrt{|x|}$,

b. $f(x) = (x^2 - 1)^2$,

c. $f(x) = \sin x$,

d. $f(x) = |x| + |x - a|$

e. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & |x| > 1, \\ 0, & |x| \le 1. \end{cases}$

8. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования

$$c^* x \to \min, \ Ax \ge b, x \ge 0,$$

с помощью преобразования Лежандра.

9. Свести задачу линейного программирования в общей форме:

$$c^* x \to \min, \qquad Ax \ge b$$

к задаче линейного программирования в канонической форме:

$$c^* x \to \min, \ Ax = b, x \ge 0.$$

10. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max, \ x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, 4 \ ,$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$$

с заданной начальной крайней точкой $x_0 = (0,0,1,1)^T$.

11. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, используя метод искусственного базиса для нахождения начальной крайней точки

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max, \quad x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0.$$

Подписано в печать 04.08.2022. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 0,5
Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 140 экз. Заказ № 151.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru