Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_А.А. Воронов

2020 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

по направлению подготовки:

**03.03.01 «Прикладные математика и физика»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 3

семестры: 5

Трудоёмкость:

вариативная часть – 3 зач. ед.,

лекции – 30 часов Экзамен – 5 семестр

практические (семинарские)   
занятия – 30 часов

лабораторные занятия – 0 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа

– 75 часов

# Программу составили:

д. ф.-м. н., проф. К. Ю. Осипенко, к.ф.-м.н., доцент А.Г. Бирюков, к.ф.-м.н. А.М.Катруца, к.ф.-м.н. О.С. Федько, к.ф.-м.н. А.В. Чернов

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

15 мая 2020 года

Заведующий кафедрой С. А. Гуз

**Часть I. Выпуклый анализ**

1. Выпуклые множества. Выпуклая оболочка. Аффинное подпространство. Аффинная оболочка. Размерность множества.
2. Теорема Каратеодори. Теорема о выпуклой оболочке компакта в конечномерном пространстве.
3. Коническая оболочка. Теорема Каратеодори для конической оболочки.
4. Теорема Радона.
5. Теорема Хелли.
6. Теоремы отделимости в линейном нормированном пространстве.
7. Вторая теорема отделимости в конечномерном случае.
8. Аффинная независимость. Симплексы.
9. Относительная внутренность. Первая теорема отделимости в конечномерном случае.
10. Выпуклые функции. Условия выпуклости. Теорема Каруша – Куна–Таккера.
11. Субдифференциал. Субдифференциал нормы.
12. Субдифференциал выпуклой дифференцируемой функции. Теорема Ферма в субдифференциальной форме.
13. Субдифференциальное исчисление. Теорема Моро–Рокафеллара.
14. Теорема Дубовицкого–Милютина.
15. Субдифференциальная форма теоремы Каруша–-Куна–Таккера.
16. Двойственное описание выпуклых замкнутых множеств.
17. Теорема о поточечной верхней грани аффинных функций.
18. Сопряженная функция. Теорема Фенхеля–Моро.
19. Двойственность экстремальных задач. Задача линейного программирования в нормальной форме и двойственная к ней.
20. Теорема о замкнутости конечнопорожденного конуса.
21. Теорема о существовании решения задачи линейного программирования.
22. Теорема о двойственности для задачи линейного программирования.
23. Различные формы задач линейного программирования и соответствующие двойственные задачи.
24. Крайние точки в задаче линейного программирования.
25. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Случай и случай .
26. Симплекс-метод решения задач линейного программирования (основная теорема).

Литература

*Основная*

1. *Осипенко К.Ю.* Выпуклый анализ. Курс лекций, 2016. (<http://new.math.msu.su/department/opu/node/434>)
2. *Осипенко К.Ю.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. Курс лекций, 2017. (<http://new.math.msu.su/department/opu/node/464>)
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и фукционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
4. *Протасов В.Ю.* Выпуклый анализ. Курс лекций, 2009. (<http://new.math.msu.su/department/opu/node/354>)
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.
6. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2003.
7. *Галеев Э.М.* Оптимизация: Теория, примеры, задачи: учебное пособие. М.: Либроком, 2010.

*Дополнительная литература*

1. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 2008.
2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 2011.
3. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
4. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2014.
5. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. – М.: МФТИ, 2014.
6. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – М.: МФТИ, 2015.
7. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. – М.: МФТИ, 2010.
8. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
9. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.*  Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
10. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
11. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.

**ЗАДАНИЕ № 1**

1. Пусть выпуклые множества. Тогда их линейная комбинация выпуклое множество. Доказать.
2. Привести пример невыпуклых множеств и таких, что является выпуклым множеством.
3. Построить пример замкнутого множества, выпуклая оболочка которого не является замкнутым множеством.
4. Доказать, что замыкание выпуклого множества является выпуклым.
5. Доказать, что .
6. Доказать:

а) -мерный симплекс в содержит внутреннюю точку;

б) Пусть выпуклое множество размерности *d.* Тогда *A* содержит внутреннюю точку.

1. Даны множества
2. матрица
3. матрица,

а. Показать, что и аффинные множества (подпространства)

b. Множество представить в форме 2.

Множество представить в форме 1.

1. При каких множество

является выпуклым?

1. При каких множество

является выпуклым?

1. Выяснить, являются ли выпуклыми функции
   1. .
2. Привести пример выпуклой функции такой, что не является выпуклой.
3. Привести пример двух выпуклых функций, суперпозиция которых не является выпуклой.
4. Решить задачу:
5. Используя геометрические интерпретации, решить следующие экстремальные задачи:

а) при условии

б) при условии

16. Определить расстояние между множествами

Вычисления провести с относительной точностью .

**ЗАДАНИЕ № 2**

1. Вычислить :
   1. .
2. Привести пример выпуклой замкнутой функции и точки , таких, что , .
3. Решить задачу:
4. Решить задачу:
5. Найти сопряженные функции от следующих функций:
   1. ,
6. Найти сопряженные функции от следующих функций:
   1. ,
   2. ,
7. Найти вторые сопряженные функции от следующих функций:
   1. ,
   2. ,
   3. ,
   4. .
8. Вывести двойственную задачу для задачи линейного программирования

,

с помощью преобразования Лежандра.

1. Свести задачу линейного программирования в общей форме:

к задаче линейного программирования в канонической форме:

.

1. Решить задачу линейного программирования

,

,

с заданной начальной крайней точкой .

1. Следующую задачу линейного программирования решить табличным симплекс-методом:

Найти решение соответствующей двойственной задачи.

***Указание.*** Конкретные значения параметров *A* и *B* получить у своего преподавателя.

1. Между точками *A* и *B*, расположенными на одинаковой высоте от земли, подвешена гибкая тяжелая нить с постоянной линейной плотностью кг/м. Расстояние между точками *A* и *B* равно *l*. Найти такую длину нити *L*, чтобы натяжение нити в точках подвеса *A* и *B* было минимальным. Уравнение точек линии в декартовой прямоугольной системе координат *xy*, начало которой находится в точке *A*, ось *x* проходит через точки *A* и *B*, ось *y* параллельна ускорению свободного падения, имеет вид где параметр, зависящий от длины нити *L*.

Подписано в печать 10.06.2020. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 0,5

Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 160 экз. Заказ № 237.

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования   
«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: [rio@mipt.ru](mailto:rio@mipt.ru)

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: [polygraph@mipt.ru](mailto:polygraph@mipt.ru)