

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
_____ А.А. Воронов
«17» января 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 3

семестры: б

лекции – 30 часов

Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н. А.В. Гасников, Е.Д. Бородич, А.Н. Безносиков,
к.ф.-м.н. Д.М. Двинских, к.ф.-м.н. Ю.В. Дорн, к.ф.-м.н. А.В. Зухба,
к.ф.-м.н. А.М. Катруца, Д.М. Меркулов, А.С. Руденко,
к.ф.-м.н. А.В. Чернов, Ю.И. Шароватова, Д.В. Ярмошик.

Программа принята на заседании
кафедры математических основ управления
12 января 2023 года

Заведующий кафедрой

А.В. Гасников

Часть II. Численные методы

Программа лекций

1. Понятие о численных методах оптимизации. Метод градиентного спуска. Сложность задач оптимизации. Сильно выпуклые задачи, выпуклые (вырожденные) задачи, невыпуклые задачи. Гладкие, негладкие задачи. Регуляризация и рестарты. О возможности вычислять градиент и автоматическом дифференцировании.* Приложение к задаче оптимального управления.*
2. Невыпуклая оптимизация. Условие Поляка-Лоясиевича (ПЛ) и глобальная сходимость градиентного спуска. Пример: сведение решения системы нелинейных уравнений к задаче оптимизации с условием ПЛ. Сходимость градиентного спуска к локальному экстремуму. Принцип множителей Лагранжа и теорема о неявной функции.* Основные факты выпуклой оптимизации. Принцип множителей Лагранжа и теорема об отделимости точки от выпуклого множества гиперплоскостью (без доказательства).*
3. Двойственная задача. Слабая и сильная двойственность для задач выпуклой оптимизации.* Теорема о минимаксе (Фон Неймана, Сион-Какутани) (без доказательства). Седловые задачи. Коническая двойственность.* Теоремы об альтернативах (Фаркаш) и их следствия (основная теорема финансовой математики об отсутствии арбитража; робастная оптимизация).* Понятие о прямо-двойственных методах на примере решение задачи минимизации выпуклого сепарабельного функционала с аффинными ограничениями с помощью перехода к двойственной задаче и ее решения методом градиентного спуска.
4. Унимодальные функции одной переменной. Методы одномерной минимизации (метод дихотомии, метод золотого сечения, метод Фибоначчи). Задача о распределении ресурсов. Методы маломерной оптимизации: метод центров тяжести, метод эллипсоидов.
5. Способы выбора шага в методах. Наискорейший спуск. Правило Армихо и правило Голдстейна.* Адаптивный способ выбора шага. Сопряженные направления. Метод сопряженных градиентов для минимизации квадратичных функций. Метод сопряженных градиентов для решения задач выпуклой оптимизации. Метод тяжелого шарика Поляка. Ускоренный градиентный метод (в разных вариантах: линейный каплинг,* метод подобных треугольников). Новый ускоренный градиентный метод (на базе метода линейного каплинга) с одномерными минимизациями.*

6. Задачи оптимизации на множествах простой структуры. Дивергенция Брэгмана. Метод проекции (суб-)градиента, метод зеркального спуска. Метод условного градиента (Франк-Вульфа). Пример задачи минимизации разреженной квадратичной формы на единичном симплексе.*
7. Концепция (неточной) модели функции.* Композитная оптимизация. Универсальный градиентный спуск и его ускоренный вариант. Проксимальный градиентный спуск. Ускоренный проксимальный метод (в варианте Монтейро-Свайтера). Каталист - общий способ ускорения различных неускоренных методов.*
8. Метод Ньютона. Квазиньютоновские методы (LBFGS). Метод Ньютона с кубической регуляризацией. Тензорные методы. Ускоренные тензорные методы.*
9. Стохастическая оптимизация. Минибатчинг и распараллеливание. Рандомизированные методы на примере покомпонентных и безградиентных методов. Задача минимизации суммы функций.
10. Общая схема метода штрафных функций. Метод модифицированной функции Лагранжа.* Методы внутренней точки. Понятие самосогласованного барьера. Методы параметризации целевых функций. Методы отслеживания центральной траектории.
11. Распределенная оптимизация на примере решения задач выпуклой оптимизации функционалов вида суммы функций.*
12. Численные методы оптимизации на службе статистики и машинного обучения. Принцип максимального правдоподобия и метод Поляка-Юдицкого, адаптивные методы стохастической оптимизации.* (Лекция не входит в основную программу; она будет прочитана, только если позволит время.)

Пункты с пометкой * – факультативные.

Литература

Основная

1. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска. – М.: МФТИ, 2018. – 241 с. 2-е изд. <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1711/1711.00394.pdf>
2. *Воронцова Е.А., Хильдебранд Р., Гасников А.В., Стоянкин Ф.С.* Выпуклая оптимизация: Учебн. пособие. – Москва: МФТИ, 2021. – 364 с. <https://arxiv.org/pdf/2106.01946.pdf>
3. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. Изд. 2-ое, испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2014.

4. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. – Cambridge University Press, 2004.
5. *Bubeck S.* Convex optimization: algorithms and complexity // Foundations and Trends in Machine Learning. – 2015. – V. 8, N 3–4. – P. 231–357.
6. *Nemirovski A.* Advanced Nonlinear Programming // Lectures, ISyE 7683 Spring 2019.
7. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. – М.: МФТИ, 2015.

Дополнительная литература

1. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 2008.
2. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: М.: Наука, 2008.
3. *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2003.
4. *Nocedal J., Wright S.* Numerical optimization. – Springer, 2006.
5. *Жадан В.Г.* Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. – М.: МФТИ, 2014.
6. *Бирюков А.Г.* Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах. – М.: МФТИ, 2010.
7. *Галеев Э.М.* Оптимизация. Теория. Примеры. Задачи. – М.: КомКнига, УРСС, 2006.
8. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010.
9. *Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978.
10. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. – М.: ВЦ РАН, 2013.
11. *Ашманов С.А., Тимохов А.В.* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1991.
12. *Гасников А.В.* Оптимизация и анализ данных // Курс лекций в Адыгейском государственном университете. – Кавказский математический центр, 26–30 ноября 2018 г. – URL: <https://www.youtube.com/playlist?list=PLVdkoATzj9WQM9..FrnU64>

13. https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/tree/master/Spring2022
14. <https://fmin.xyz/>

Сайт курса - <https://opt.mipt.ru/>

Программа семинаров

1. Классификация и обозначения в задачах оптимизации. Скорость сходимости. Одномерный поиск.
<https://mipt21.fmin.xyz/presentations/14.pdf>
2. Методы нулевого порядка.
<https://mipt21.fmin.xyz/presentations/15.pdf>
3. Градиентный спуск. Оценки сходимости. Способы выбора шага. Метод наискорейшего спуска.
<https://mipt21.fmin.xyz/presentations/16.pdf>
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/intro_gd.ipynb
4. Ускорение градиентных методов - ускоренный метод Нестерова, метод тяжелого шарика. Экспоненциальное взвешивание.
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/hb_acc_grad.ipynb
5. Метод сопряженных градиентов.
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/cg.ipynb
<https://mipt21.fmin.xyz/presentations/20.pdf>
6. Метод Ньютона. Квазиньютоновские методы.
<https://mipt21.fmin.xyz/presentations/19.pdf>
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/newton_quasi.ipynb
7. Задачи негладкой оптимизации: субградиентные и проксимальные методы.
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/subgrad_prox.ipynb
8. Метод проекции субградиента. Приложения градиентных методов.
https://fmin.xyz/docs/methods/fom/Projected_subgradient_descent/
9. Метод Франка-Вольфа.
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/frank-wolfe.ipynb
10. Методы внутренней точки.

<https://github.com/amkatrutsa/seminars-fivt/blob/master/13-InteriorPoint/Seminar13.ipynb>

11. Распараллеливание методов оптимизации: метод штрафов, модифицированной функции Лагранжа и ADMM.
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/penalty_admm.ipynb
12. Методы стохастического градиентного спуска. Расписания, адаптивные методы. Применение SGD для обучения нейронных сетей.
https://github.com/amkatrutsa/optimization_course/blob/master/Spring2022/stoch_grad_methods.ipynb

Задание

1. Скорость сходимости.
<https://fmin.xyz/docs/exercises/convergence/>
2. Одномерная оптимизация.
https://colab.research.google.com/github/MerkulovDaniil/mipt21/blob/main/notebooks/22_HW_1.ipynb#scrollTo=PUxea7laqkCL
3. Методы нулевого порядка.
<https://fmin.xyz/docs/exercises/zom/>
4. Градиентный спуск.
<https://fmin.xyz/docs/exercises/fom/> Задачи 1-4.
5. Ускоренные градиентные методы.
6. Метод проекции градиента.
https://colab.research.google.com/github/MerkulovDaniil/optim/blob/master/assets/Notebooks/Projected_gradient_descent_affine.ipynb
7. Метод Ньютона. Квазиньютоновские методы.
https://colab.research.google.com/github/MerkulovDaniil/mipt21/blob/main/notebooks/22_HW_2.ipynb
9. Метод сопряженных градиентов.
https://colab.research.google.com/github/MerkulovDaniil/mipt21/blob/main/notebooks/22_HW_2.ipynb
10. Стохастические градиентные методы.
https://colab.research.google.com/github/MerkulovDaniil/mipt21/blob/main/notebooks/22_HW_2.ipynb

Возможно добавление задач и упражнений (по усмотрению преподавателей).

Подписано в печать 17.01.2023. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 0,4
Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 140 экз. Заказ № 354.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный,
Институтский пер.,9 Тел. (495) 408-84-30, e-mail:
polygraph@mipt.ru