Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО

Проректор по учебной работе

А.А. Воронов

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2025 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ**

по направлению подготовки:

 **09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»**

физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **математических основ управления**

курс: 2

семестры: 3

лекции – 30 часов Диф. зачет – 3 семестр

практические (семинарские)
занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа

 – 30 часов

# Программу составили:

к. ф.-м. н., доцент Вялый М.Н., к.ф.-м.н. Зухба А.В.,

к.ф.-м.н. Шестаков С.А.

Программа принята на заседании

кафедры математических основ управления

21 февраля 2025 года

Заведующий кафедрой А.В. Гасников

**Введение в математическую логику**

1. **Булевы функции. Булевы формулы**.

Совместные и несовместные множества функций. Семантическое следствие. Представление формулы в виде дерева. Тавтологии и выполнимые формулы.

1. **Алгоритмы разбора формулы и вычисления значения формулы.**
2. **Основные понятия логики первого порядка.**

Алгебра предикатов. Формулы логики первого порядка. Правила оценки формулы. Алгоритм разбора формулы первого порядка. Свободные и связанные вхождения переменных в формулы. Замкнутые формулы.

1. **Теории и модели.**

Семантическое следствие. Выразимость предикатов.

1. **Общезначимые и равносильные формулы**.

Равносильные преобразования формул: замена подформулы на равносильную замены переменных, перестановки связок и кванторов, перестановки кванторов. Предваренная нормальная форма.

1. **Выразимость формулами логики первого порядка**.

Метод автоморфизмов доказательства невыразимости предикатов. Элиминация кванторов: определения, основные результаты (без доказательств). Элементарная эквивалентность моделей. Игры Эренфойхта. Критерий элементарной эквивалентности. Применение игр Эренфойхта для доказательства невыразимости предикатов.

1. **Исчисление высказываний, корректность, полнота**.

Исчисление высказываний (ИВ). Правило modus ponens. Выводимые формулы. Условный вывод (вывод из множества гипотез). Корректность ИВ. Непротиворечивость ИВ. Теорема дедукции. Лемма оценки (лемма Кальмара). Полные и непротиворечивые множества формул. Полнота ИВ. Интуиционистская логика, интуиционистское исчисление высказываний (ИИВ). Модели Крипке. Полнота ИИВ (без доказательства).

1. **Исчисление предикатов (ИП).**

Аксиомы, правила вывода исчисления ИП. Корректность ИП. Полнота ИП (без доказательства).

1. **Исчисление резолюций для булевых формул и логики первого порядка**.

Правило резолюций и исчисление резолюций для булевых формул. Корректность и полнота. (Полиномиальная) сводимость задачи проверки выполнимости булевой формулы к задаче выполнимости КНФ. Исчиcление резолюций и проверка общезначимости. Сколемизация. Универсальные дизъюнкты, исчисление резолюций для универсальных дизъюнктов (ИР). Корректность и полнота ИР. Формальная математика. Существование нестандартных моделей арифметики Пеано.

1. **Неразрешимость множества общезначимых формул**.

Перечислимость множества общезначимых формул. Перечислимость формул, выводимых из перечислимого множества аксиом и правил вывода. Ассоциативные исчисления. Неразрешимость проблемы достижимости в общем случае и в симметрических исчислениях. Неразрешимость проблемы равенства в конечно порождённых полугруппах. Доказательство Неразрешимости множества общезначимых формул.

1. **Неперечислимость множества формул, истинных в арифметике**.

Выразимость в арифметике, бета-функция Гёделя. Теорема Тарского о неперечислимости истинных в арифметике формул. Семантическая и синтаксическая версии теоремы Гёделя о неполноте.

Литература

*Основная*

1. *Журавлев Ю.И., Флеров Ю.А., Вялый М.Н.* Дискретный анализ.

Формальные системы и алгоритмы. М.: ООО КонтактПлюс, 2010.

1. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Начала теории множеств. Изд. 4-е. М.: МЦНМО, 2012.
2. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2012.
3. *Верещагин Н.К., Шень А.* Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции. Изд. 4-е. М.: МЦНМО, 2012.
4. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

*Дополнительная литература*

1. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математический логике и теории алгоритмов. М.: Физматгиз, 2004.
2. *Успенский В.А.* Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней // Математическое просвещение. 2011. № 3, вып. 15. С. 35–75.
3. *Беклемишев Л.Д.*, Теоремы Гёделя о неполноте и границы их применимости. I //  УМН. 2010. Т. 65, №:5(395). С. 61–106.
4. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., 1983.

**ЗАДАНИЕ**

1. Являются ли тавтологиями следующие булевы формулы:

а)

б)

в)

г)

1. Докажите, что если в булеву формулу каждая переменная входит лишь один раз, то эта формула не является тавтологией.
2. Пусть Г – множество булевых формул, имеющих вид



где *A* – любая формула. Является ли формула *x* семантическим следствием множества формул Г?

1. Может ли формула первого порядка

выражать в некоторой интерпретации на целых числах предикат «*xy* = 0»?

1. Найдите формулу первого порядка, которая истинна в любой конечной модели, но ложна в некоторой бесконечной модели.
2. Является ли общезначимой формула

1. Укажите такие терм *t* и формулу *A* с одним параметром, что формула не является общезначимой.

1. В модели арифметики носитель – множество неотрицательных целых чисел, бинарные предикаты сравнения чисел и равенства чисел, функции сложения и умножения, а также константы 0, 1. Выразите в этой модели предикаты: а) «число *x* является степенью 2»; б) «число *x* простое»; в) «число *x* является степенью 10».
2. Докажите невыразимость предиката «слово *w* является квадратом» в модели, носитель которой – двоичные слова, а единственный бинарный предикат в модели – «слово *u* является префиксом слова *v*.
3. Являются ли элементарно эквивалентными модели «целые числа со сравнением» и «рациональные числа со сравнением»?
4. Может ли быть аксиомой исчисления высказываний формула вида где *А*, *В*, *С* – некоторые формулы?

1. Постройте вывод формул в исчислении высказываний, не используя теорему о полноте (разрешается ссылаться на теорему дедукции):

а)

б)

в)

г)

1. Множество Г формул исчисления высказываний таково, что из него нельзя вывести любую формулу исчисления высказываний, но из множества уже можно вывести любую формулу исчисления высказываний. Следует ли из этого, что из множества Г можно вывести формулу (*x, y* – переменные).

1. Постройте опровержение резолюциями для КНФ

1. Проверьте методом резолюций выполнимость КНФ

1. Проверьте методом резолюций общезначимость формулы

1. Докажите, что существует алгоритм проверки равенства слов для полугруппы с двумя порождающими *a*, *b* и соотношением *aba* = *bab.* Оцените время работы такого алгоритма в зависимости от длины сравниваемых слов.
2. Ассоциативное исчисление содержит только правила преобразования слов вида *w → a,* где *а* – символ алфавита, w – непустое слово. Докажите, что проблема достижимости для такого исчисления алгоритмически разрешима.
3. Докажите, что алгоритмически неразрешима проблема достижимости для ассоциативных исчислений в алфавите из двух символов.
4. Разрешимо ли множество таких общезначимых формул первого порядка, что в формуле (а) нет функциональных символов, а все предикатные символы – унарные; (б) все предикатные и все функциональные символы – унарные?
5. Перечислимо ли множество замкнутых выполнимых формул первого порядка (выполнимая формула истинна хотя бы в одной интерпретации)?
6. Перечислимо ли множество замкнутых формул первого порядка, которые истинны хотя бы в одной интерпретации на конечной области?

Подписано в печать 04.07.2025. Формат 60 × 84 1/16. Усл. печ. л. 0,5

Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 140 экз. Заказ № 151.

Федеральное государственное автономное образовательное

учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт

 (национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru